J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
14(1970), 385–400

HOMOMORPHISMES DE DISTRIBUTIONS FORMELLES

ALEXIS PETITJEAN

Introduction

Ce travail n'est qu'une première partie de l'étude des algèbres de Lie filtrées non transitives. On y étudie essentiellement un type d'algèbres de Lie non transitives, les distributions involutives sur un espace vectoriel V, qui ont éte introduites et étudiées par Mademoiselle Junia B. Botelho [1].

Dans une première partie on donne deux caractérisations des distributions, l'une à l'aide de l'algèbre de Lie graduée associée et l'autre à l'aide de son normalisateur dans $D(V)$. On y démontre en particulier que les distributions involutives sont entiérement caractérisées par leur algèbre de Lie graduée ou par leur normalisateur.

La deuxième partie de cet article s'occupe des homomorphismes de distributions. On démontre que tout homomorphisme assez "régulier" d'une distribution dans une autre, se prolonge de manière unique en un automorphisme de $D(V)$.

On se donne un corps commutatif Δ de caractéristique nulle qui sera le corps de base de tous les espaces vectoriels considérés. On considére alors un espace vectoriel V de dimension n, dont le dual sera noté V^* et qui sera fixé dans toute la suite. On note aussi $\hat{S}(V^*) = \prod_{k\geqslant 0} S^k(V^*)$ l'algèbre locale des séries formelles définies sur V et $D(V)$ l'algèbre de Lie filtrée des Δ-dérivations de $\hat{S}(V^*)$.

1. Distributions

Rappelons que $D(V)$ muni de sa structure naturelle de $\hat{S}(V^*)$-module est libre de rang n et que n éléments $X_1, \cdots, X_n$ de $D(V)$ en constituent une $\hat{S}(V^*)$-base si et seulement si leur projections $x_1, \cdots, x_n$ sur V forment une Δ-base de V.

Puisque $\hat{S}(V^*)$ est un anneau noethérien, tout sous-module de $D(V)$ est de

Received June 20, 1977.

type fini et fermé dans $D(V)$ pour la topologie de la filtration (i.e. la $\mathfrak{M}$-topologie, $\mathfrak{M}$ étant l'idéal maximal de $\hat{S}(V^*)$).

1.1. Lemme. *Soient L et M deux sous-espaces vectoriels de $D(V)$. On suppose L fermé dans $D(V)$, $L \subset M$ et $\operatorname{gr} L = \operatorname{gr} M$. Alors $L = M$.*

1.2. Lemma. *Si L est un sous-$\hat{S}(V^*)$-module de $D(V)$ on a $\operatorname{gr} L \supset U \otimes S(V^*)$ où $U = \operatorname{gr}_{-1} L$.*

La démonstration de ces deux lemmes est immédiate. Rappelons maintenant

1.3. Definition. Une distribution de rang p sur V est un sous-$\hat{S}(V^*)$-module libre L de $D(V)$ de rang $p = \dim_\Delta \operatorname{gr}_{-1} L$. Si de plus L est une sous-algébre de Lie de $D(V)$ on dira que la distribution L est involutive.

1.4. Lemma. *Soit L une distribution de rang p sur V et soint $X_1, \cdots, X_p \in L$. Alors $X_1, \cdots, X_p$ forment une base de L si et seulement si leur projections $x_1, \cdots, x_p$ sur $U = \operatorname{gr}_{-1} L$ forment une Δ-base de U.*

Pour une démonstration de ce lemme, on peut consulter [1].

1.5. Proposition. *Un sous-$\hat{S}(V^*)$-module L de $D(V)$ est une distribution si et seulement si $\operatorname{gr} L = U \otimes S(V^*)$ où $U = \operatorname{gr}_{-1} L$.*

Preuve. La nécessité résulte de lemme 1.4. Inversement, supposons $\operatorname{gr} L = U \otimes S(V^*)$ et considéons $X_1, \cdots, X_p \in L$ dont les projections sur V forment une Δ-base de U. D'après lemme 1.4 le sous-module M de $D(V)$ engendré par $X_1, \cdots, X_p$ est une distribution et l'on a $L \supset M$ et $\operatorname{gr} M = U \otimes S(V^*) = \operatorname{gr} L$. De lemme 1.1 on déduit alors que $L = M$.

Si $X \in D(V)$, on notera X^k sa projection sur $V^k = D(V)/D^k(V)$.

1.6. Lemme. *Soit L un sous-$\hat{S}(V^*)$-module de $D(V)$. On pose $V_L^k = L/L^k$ ($k \geqslant 0$) et $p_k = \dim V_L^k$. Il existe un entier k_0 tel que tout système d'éléments $X_1, \cdots, X_q$ de L dont les projections sur $V_L^{k_0}$ engendrent le Δ-espace vectoriel $V_L^{k_0}$, est un système de $\hat{S}(V^*)$-générateurs de L. En particulier tout système d'éléments $X_1, \cdots, X_q$ de L tel que $X_1^\lambda, \cdots, X_{p_\lambda}^\lambda$ soit une base de V_L^λ et $X_i^\lambda = 0$ pour $i > p_\lambda$, pour tout $\lambda \in \{0, \cdots, k_0\}$ est un système de générateurs de L.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du corollaire 2 du théorème 7 et du théorème 4′ du chapitre VIII de [12].

1.7. Corollaire. *Soit L un sous-$\hat{S}(V^*)$-module de $D(V)$ dont le normalisateur $N(L)$ dans $D(V)$ est une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V)$. Alors L est une distribution sur V.*

Preuve. En vertu de proposition 1.5 il suffit de montrer que $\operatorname{gr}_k L = U \otimes S^{k+1}(V^*)$ où $U = \operatorname{gr}_{-1} L$, pour tout $k \geqslant 0$. On le fait par récurrence sur k. On admet que $\operatorname{gr}_k L = U \otimes S^{k+1}(V^*)$ pour un certain $k \geqslant -1$. Soient $X \in \operatorname{gr}_{k+1} L$ et $y \in V$. On considère un relèvement $\tilde{X}$ de X dans L^{k+1}. Puisque $N(L)$ est transitive, on peut considérer un relèvement $\tilde{Y}$ de y dans $N(L)$. On a

$[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in L$ donc $[X, y] \in \mathrm{gr}_k L$. Ceci prouve que $[\mathrm{gr}_{k+1} L, V] \subset \mathrm{gr}_k L$ i.e. $\mathrm{gr}_{k+1} L \subset p(\mathrm{gr}_k L)$. Or par hypothèse $\mathrm{gr}_k L = U \otimes S^{k+1}(V^*)$ et par suite $p(\mathrm{gr}_k L) = U \otimes S^{k+2}(V^*)$. Le corollaire résulte alors de lemme 1.2.

La réciproque de corollaire 1.7 est en général inexacte comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple. Prenons $V = \Delta^3$. Soit L la distribution de rang 2 engendrée par $X = \partial/\partial x$ et $Y = \partial/\partial y + xy\partial/\partial y$. On montre sans peine que $N(L)$ est formé de toutes les dérivations de la forme $h(\partial/\partial z)$ où $\partial h/\partial x = \partial h/\partial y = 0$.

Nous allons maintenant préciser ces résultats au cas d'une distribution involutive.

Si L est une sous-algèbre de Lie de $D(V)$ on note $S(L)$ le plus grand sous-$\hat{S}(V^*)$-module de $D(V)$ contenu dans L, i.e.,

$$S(L) = \{X \in L : fX \in L \text{ pour tout } f \in \hat{S}(V^*)\}.$$

Remarquons que si $X, Y \in S(L)$ alors pour tout $f \in \hat{S}(V^*)$ on a $f[X, Y] = [fX, Y] + (Yf)X \in L$ donc $[X, Y] \in S(L)$ i.e. $S(L)$ est une sous-algébre de Lie de $D(V)$.

On notera aussi $\mathrm{Dis}_p(V)$ l'ensemble des distributions involutives de rang p sur V et $\prod_{n-p}^{\max}(V)$ l'ensemble des sous-algèbres $(n-p)$-projetables maximales de $D(V)$ (cf. [9]).

On se propose de montrer

1.8. Proposition. *Si $L \in \mathrm{Dis}_p(V)$ alors $N(L) \in \prod_{n-p}^{\max}(V)$. De plus l'application*

$$N: L \in \mathrm{Dis}_p(V) \to N(L) \in \prod_{n-p}^{\max}(V)$$

est bijective et son inverse est S.

Lemme. *Pour toute sous-algèbre L de $D(V)$ et tout automorphisme Φ de $D(V)$ on a*

$$\Phi(S(L)) = S(\Phi(L)), \quad \Phi(N(L)) = N(\Phi(L)).$$

Preuve de lemme. C'est une conséquence immédiate du théorème 2.5 de [9].

Preuve de proposition 1.8. Soit $L \in \mathrm{Dis}_p(V)$. En vertu du lemme et du [1, Théorème 3.3] on peut supposer que L est engendrée sur $\hat{S}(V^*)$ par $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_p$ où $x_1, \cdots, x_p, \cdots, x_n$ est une base de V. Il est alors aisé de voir que $N(L) = \hat{G}(U)$ où $U = \mathrm{gr}_{-1} L$ (cf. [9, §3]) i.e., $N(L) \in \prod_{n-p}^{\max}(V)$.

Remarquons maintenant que $S(\hat{G}(U)) = U \otimes \hat{S}(V^*) = L$, ce qui, en vertu du lemme implique $S(P) \in \mathrm{Dis}_p(V)$ pour tout $P \in \prod_{n-p}^{\max}(V)$. D'autre part, on vérifie facilement en utilisant le lemme antérieur et les résultats de [9, §3] que $N(S(P)) = P$ et $S(N(L)) = L$ pour tout $P \in \coprod_{n-p}^{\max}(V)$ et tout $L \in \mathrm{Dis}_p(V)$ i.e., N est bijective et a S pour inverse.

On peut maintenant énoncer

1.9. Théorème. *Soit L un sous-$\hat{S}(V^*)$-module de $D(V)$. Pour que L soit une distribution involutive sur V il faut et il suffit que $N(L)$ soit une algèbre projetable maximale sur V.*

Preuve. La nécessité fait l'objet de proposition 1.8. Inversement, supposons que $N(L)$ soit projetable maximale. En particulier $N(L)$ est une sous-algèbre transitive de $D(V)$ donc d'apres corollaire 1.7, L est une distribution sur V; par conséquent $\mathrm{gr}\, L = U \otimes S(V^*)$ avec $U = \mathrm{gr}_{-1}\, L$. D'après proposition 1.8, il existe une distribution involutive unique M telle que $N(M) = N(L)$. De la construction de M on déduit immédiatement que $M \supset L$. Les sous-espaces $\mathrm{gr}_{-1}\, L$ et $\mathrm{gr}_{-1}\, M$ sont invariants par $\mathrm{gr}_0\, N(L)$. Si $\mathrm{gr}_{-1}\, L = 0$ alors puisque L est une distribution on aurait $L = 0$ donc L est une distribution involutive. Si $\mathrm{gr}_{-1}\, L = V$ alors, L étant une distribution, on aurait $L = D(V)$ et serait encore involutive. Si $\mathrm{gr}_{-1}\, L$ n'est ni nul ni égal à V alors $N(L) \neq D(V)$; en effet soit $X \in D(V)$ tel que $X \notin L$. Si $[X, L]$ n'est pas contenu dans L c'est terminé; sinon choisissons $Y \in L$ et $f \in \hat{S}(V^*)$ tels que $Y(f) \notin \mathfrak{M}$, i.e., $Y(f)$ est une série formelle inversible et par suite $Y(f).\ X \notin L$. Il s'ensuit que $[fX, Y] = f[X, Y] - (Y(f)).\ X \notin L$, i.e., $fX \notin N(L)$ et par conséquent $N(L) \neq D(V)$. Une autre conséquence de ce fait est que $M \neq D(V)$, i.e., $\mathrm{gr}_{-1}\, M \neq V$. Or puisque $N(L)$ est projetable maximale non identique à $D(V)$, son groupe d'isotropie laisse invariant un et un seul sous-espace propre de V donc $\mathrm{gr}_{-1}\, L = \mathrm{gr}_{-1}\, M$. D'aprés proposition 1.5 on a $\mathrm{gr}\, L = \mathrm{gr}\, M$ donc par lemme 1.1 $L = M$, i.e., L est une distribution involutive.

2. Algebres de Lie homogenes, regularite

Rappelons (cf. [10, II-ii]) qu'une sous-algèbre L de $D(V)$ est dite homogène si son normalisateur $N(L)$ est une sous-algèbre transitive de $D(V)$. Une distribution involutive est homogène.

Si L est une sous-algèbre de Lie de $D(V)$ on note $\hat{L}$ le sous-$\hat{S}(V^*)$-module de $D(V)$ engendré par L. Si L est une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V)$ on a $\hat{L} = D(V)$. Dans tous les cas $\hat{L}$ est encore une sous-algèbre de Lie de $D(V)$ et l'on a $\mathrm{gr}_{-1}\, \hat{L} = \mathrm{gr}_{-1}\, L$.

2.1. Definition. Une sous-algèbre L de $D(V)$ est dite semi-régulière si $[\mathrm{gr}\, L, V] \subset \mathrm{gr}\, L$ et si $\hat{L}$ est une distribution (nécessairement involutive) sur V.

Toute sous-algèbre de Lie transitive, toute distribution sur V sont semi-régulières. Plus généralement,

2.2. Proposition. *Toute sous-algèbre homogène L de $D(V)$ est semi-régulière.*

Preuve. Soit N le normalisateur de L dans $D(V)$. On a $[N, L^k] \subset L^{k-1}$ ce qui, vu la transitivité de N implique $[V, \mathrm{gr}_k L] \subset \mathrm{gr}_{k-1} L$. La première condition de semi-régularité est donc véifiée. Pour la seconde, observons que l'inclusion $[N, L] \subset L$ implique $[N, \hat{L}] \subset \hat{L}$ et par suite $[V, \mathrm{gr}_k \hat{L}] \subset \mathrm{gr}_{k-1} \hat{L}$ pour tout $k \geqslant 0$. D'après 1.7, on a $\mathrm{gr}_0 \hat{L} = U \otimes V^*$ avec $U = \mathrm{gr}_{-1} L$. Une récurrence simple montre alors que $\mathrm{gr}_k \hat{L} \subset U \otimes S^{k+1}(V^*)$ pour tout k, donc, d'après lemma 1.2 $\mathrm{gr}\, \hat{L} = U \otimes S(V^*)$ donc $\hat{L}$ est une distribution (par proposition 1.5).

3. Prolongements d'homomorphismes de distributions graduees

L'algèbre de Lie graduée $\mathrm{gr}\, D(V)$ associée à $D(V)$ a une structure naturelle de $S(V^*)$-module gradué libre de rang n. Si G est un sous-$S(V^*)$-module de $\mathrm{gr}\, D(V)$ on a naturellement $G \supset G_{-1} \otimes S(V^*)$.

3.1. Definition. Une distribution graduée sur V est un sous-$S(V^*)$-module de $\mathrm{gr}\, D(V)$ engendré par ses éléments de degré -1. Si G est une distribution graduée on a donc $G = G_{-1} \otimes S(V^*)$.

Remarquons gu'une distribution graduée est automatiquement une sous-algébre de Lie graduée de $\mathrm{gr}\, D(V)$.

L'algèbre graduée associée à une distribution (involutive ou non) est une distribution graduée.

Let lemme suivant nous sera utile par la suite.

3.2. Lemme. *Soit U un sous-espace non nul de V. Soit $X \in \mathrm{gr}\, D(V)$ tel que $[U, X] = 0$ et $[U \otimes V^*, X] = 0$; alors $X = 0$.*

Preuve. Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base de V telle que $e_1, \cdots, e_p$ soit une base de U. On peut écrire de manière unique $X = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f^i$. Dire que $[U, X] = 0$ équivaut à dire que $\partial f^i/\partial e_j = 0$ pour $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, p$. Si $e^1, \cdots, e^n$ est la base duale de $e_1, \cdots, e_n$ on a par hypothèse $[X, e_j \otimes e^i] = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $j \leqslant p$, ou encore, compte-tenu de la nullité de $\partial f^i/\partial e_j$ pour $j \leqslant p$ et $i \leqslant n$, on a $e_j \otimes f^i = 0$ donc $f^i = 0$ pour tout i.

On considère maintenant une distribution graduée $G_1 = U_1 \oplus g_1^0 \oplus g_1^1 \oplus \cdots$ et une sous-algèbre de Lie graduée $G_2 = U_2 \oplus g_1^0 \oplus g_2^1 \oplus \cdots$ de $\mathrm{gr}\, D(V)$ telle que $[V, G_2] \subset G_2$. On se donne une base $e_1, \cdots, e_n$ de V, dont la base duale sera notée $e^1, \cdots, e^n$, telle que $e_1, \cdots, e_p$ soit une base de U_1.

On suppose qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$\Phi = (\varphi, \varphi_0, \varphi_1, \cdots): G_1 \to G_2.$$

On pose $\varphi(e_i) = \varepsilon_i$ pour $i = 1, \cdots, p$. On se propose d'abord de déterminer

$\varphi_0(e_i \otimes e^j)$ pour $i = 1, \cdots, p$ et $j = 1, \cdots, n$. Plus précisément on a

3.3. Lemme. *Il existe une base et une seule $\varepsilon_1, \cdots, e_n$ de V commencant par $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ telle que $\varphi_0(e_i \otimes e^j) = \varepsilon_i \otimes \varepsilon^j$ pour $i = 1, \cdots, p$ et $j = 1, \cdots, n$.*

Preuve. On remarque d'abord que $[\varepsilon_s, \varphi_0(e_i \otimes e^j)] = \delta_s^j \varepsilon_i$ pour $s = 1, \cdots, p$; on peut donc écrire: $\varphi_0(e_i \otimes e^j) = \varepsilon_i \otimes \alpha_i^j + \beta_i^j$ où $\alpha_i^j \in V^*$ et $\beta_i^j \in V \otimes V^*$ vérifient

$$\alpha_i^j(\varepsilon_s) = \delta_s^j \quad \text{pour } 1 \leqslant s \leqslant p, \tag{3.1}$$

$$\left[U_2, \beta_i^j\right] = 0. \tag{3.2}$$

De plus, puisque $[V, G_2] \subset G_2$ on a

$$\left[V, \beta_i^j\right] \subset U_2 \tag{3.3}$$

condition qui en vertu de (3.2) implique

$$\left[\beta_i^j, \beta_l^k\right] = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i, l \leqslant p \text{ et } 1 \leqslant j, k \leqslant n. \tag{3.4}$$

Compte-tenu des relations précédentes, l'égalité

$$\left[\varphi_0(e_i \otimes e^j), \varphi_0(e_i \otimes e^i)\right] = \varphi_0(e_i \otimes e^j),$$

où $i \neq j$ s'écrit

$$\varepsilon_i \otimes \left(\alpha_i^i \circ \beta_i^j - \alpha_i^j \circ \beta_i ui\right) = \beta_i^j \quad \text{pour } i \neq j, \tag{3.5}$$

d'où, en composant avec α_i^i, on déduit après simplification:

$$\alpha_i^j \circ \beta_i^i = 0 \quad \text{pour } j \neq i. \tag{3.6}$$

Par ailleurs, en tenant compte de (3.1) et (3.3), l'égalité (3.6) est équivalente à

$$\beta_i^i = \varepsilon_i \otimes \gamma_i^i \quad \text{pour } i = 1, \cdots, p \text{ où } \gamma_i^i \in V^*. \tag{3.7}$$

Il résulte de (3.5) et de (3.7) qu'en modifiant les α_i^j on peut supposer $\beta_i^i = 0$, i.e.,

$$\varphi_0(e_i \otimes e^j) = \varepsilon_i \otimes \alpha_i^j, \quad i \leqslant p, j \leqslant n,$$

les formes linéaires α_i^j étant ainsi uniquement déterminées. On montrera maintenant que α_i^j ne dépend pas de $i \in \{1, \cdots, p\}$. Pour cela, on se donne $i, k \in \{1, \cdots, p\}$, $i \neq k$. On peut supposer $j \neq k$; on a alors

$$\left[\varphi_0((e_i - e_k) \otimes e^j), \varphi_0(e_k \otimes e^i)\right] = \varphi_0(e_k \otimes e^j),$$

laquelle s'écrit

$$\left[\varepsilon_i \otimes \alpha_i^j - \varepsilon_k \otimes \alpha_k^j, \varepsilon_k \otimes \alpha_k^i\right] = \varepsilon_k \otimes \alpha_k^j,$$

et qui, compte-tenu de (1) donne

$$\varepsilon_k \otimes \alpha_i^j = \varepsilon_k \otimes \alpha_k^j,$$

i.e., $\alpha_i^j = \alpha_k^j$. On posera $\alpha_i^j = \alpha^j$. De la bijectivité de φ_0 et du fait que $\dim_\Delta g_1^0 = np$ résulte que $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ est une base de V^*. De plus, en vertu de (3.1), $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ est la base duale d'une base $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ de V commençant par $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$. Le lemme est démontré.

Soit $\bar{\varphi}$ l'automorphisme de V défini par $\bar{\varphi}(e_i) = \varepsilon_i$ pour $i = 1, \cdots, n$. Il est clair que $\bar{\varphi}$ est indépendant de la base $e_1, \cdots, e_n$ choisie. D'après ce qui précède, si $\bar{\varphi}_0$ est l'extension de $\bar{\varphi}$ à $V \otimes V^*$, alors φ_0 est l'extension de $\bar{\varphi}_0$ à g_1^0. On résume ce qui précède dans

3.4. Proposition. *Soient $U_1 \oplus g_1^0$ et $U_2 \oplus g_2^0$ les algèbres tronquées d'ordre 1 d'une distribution graduée sur V et d'une sous-algèbre graduée G_2 de* gr $D(V)$ *respectivement. Soit (φ, φ_0): $U_1 \oplus g_1^0 \to U_2 \oplus g_2^0$ un isomorphisme d'algèbres de Lie tronquées. Si $[V, g_2^0] \subset U_2$ il existe un unique automorphisme $\bar{\varphi}$ de V égal à φ sur U_1 et dont l'extension $\bar{\varphi}_0$ à $V \otimes V^*$ est égale à φ_0 sur g_1^0. En particulier $g_2^0 = U_2 \otimes V^*$.*

Pour pouvoir passer aux tronquées d'ordre supérieur on aura besoin de

3.5. Lemme. *Soit B: $g_1^k \to U_2 \otimes S^{l+1}(V^*)$ une application linéaire satisfaisant*

$$[U_2, B(X_k)] = 0 \quad \textit{pour tout } X_k \in g_1^k, \tag{3.8}$$

$$[\varphi_0(Y_0), B(X_k)] = B[Y_0, X_k] \tag{3.9}$$

pour tout $Y_0 \in g_1^0$ et tout $X_k \in g_1^k$. Alors si $k \geqslant 0$ et $l \geqslant -1$ on a $B = 0$. Si $k = -1$ et $l \geqslant -1$ alors il existe $\gamma \in S^{l+1}(V^*)$ tel que $\partial\gamma/\partial y = 0$ pour tout $y \in U_2$ et que $B(x) = \varphi(x) \otimes \gamma$ pour $x \in U_1$.

Preuve. On examine d'abord le cas $k = -1$ et $l \geqslant -1$. Avec les notations antérieures on pose $B(e_i) = \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \otimes \gamma_i^j$. La condition (3.8) s'exprime par $\partial\gamma_i^j/\partial y = 0$ pour tout $y \in U_2$. En prenant $Y_0 = e_s \otimes e^t$, $1 \leqslant s \leqslant p$ et $1 \leqslant t \leqslant n$ on obtient en explicitant (3.9)

$$\varepsilon_s \otimes \gamma_i^t = \delta_i^t \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \otimes \gamma_s^j,$$

d'où $\gamma_i^t = 0$ si $t \neq i$ et $\gamma_i^i = \gamma_s^s$ pour tous i et s. On pose $\gamma = \gamma_i^i$ et l'on a $B(e_i) = \varphi(e_i) \otimes \gamma$ pour $i = 1, \ldots, p$, i.e., $B(x) = \varphi(x) \otimes \gamma$ pour tout $x \in U_1$.

On suppose maintenant $k \geqslant 0$ et $l = -1$. Pour $i = 1, \ldots, p$ et $1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_{k+1} \leqslant n$ on pose

$$B(e_i \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_{k+1}}) = B_i^{j_1 \cdots j_{k+1}}.$$

On a pour $1 \leqslant s \leqslant p$ et $1 \leqslant t \leqslant n$:

$$\left[e_s \otimes e^t, e_i \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_{k+1}}\right]$$
$$= \sum_{r=1}^{k+1} \delta_s^{j_r} e_i \otimes e^{j_1} \cdots \hat{e}^{j_r} \cdots e^{j_{k+1}} e^t - \delta_i^t e_s \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_{k+1}}.$$

En explicitant (3.9) on a

$$(3.10) \qquad -\varepsilon_s \otimes e^t\left(B_i^{j_1 \cdots j_{k+1}}\right) = \sum_{r=1}^{k+1} \delta_s^{j_r} B_i^{j_1 \cdots \hat{j}_r \cdots j_{k+1} t} - \delta_i^t B_s^{j_1 \cdots j_{k+1}}.$$

Supposons $j_1 = \cdots = j_{k+1} = i$; en prenant $s = t = i$ on a $-\varepsilon_i \otimes \varepsilon^i(B_i^{i \cdots i}) = kB_i^{i \cdots i}$; en composant avec ε^i nous obtenons $\varepsilon^i(B_i^{i \cdots i}) = 0$ donc si $k > 0$ on a $B_i^{i \cdots i} = 0$. Si $k = 0$ et si $p = \dim U_1 = \dim U_2 = 1$ (donc $i = 1$) il résulte du fait que $B_1^1 \in U_2$ et de l'égalité $\varepsilon^1(B_1^1) = 0$ que $B_1^1 = 0$. Si $k = 0$ et $p > 1$ alors on peut choisir $s \neq i$ et $t \neq i$ et (3.10) donne $\varepsilon^t(B_i^i) = 0$ pour tout $t \neq i$; comme par ailleurs cette égalité vaut même pour $t = i$ on a $B_i^i = 0$. Dans tous les cas on a donc $B_i^{i \cdots i} = 0$. On suppose par récurrence que $B_i^{j_1 \cdots j_{k+1}} = 0$ dès que au moins r des indices j_λ sont égaux à i $(1 \leqslant r \leqslant k + 1)$. Par exemple, si $j_1 = \cdots = j_r = i$ et $j_{r+1}, \cdots, j_{k+1} \neq i$ en prenant $s = i$ et $t \neq i$ dans (3.10) on obtient:

$$0 = rB_i^{i \cdots i j_{r+1} \cdots j_{k+1}, t},$$

où le nombre des indices supérieurs égaux à i est égal à $r - 1$. Il s'ensuit que $B_i^{j_1 \cdots j_{k+1}} = 0$ dès que $r - 1$ des j_λ sont égaux à i. On a ainsi montré par récurrence que $B(e_i \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_{k+1}}) = 0$, i.e., $B = 0$.

Le lemme est ainsi démontré pour $l = -1$. On continue par récurrence sur l en le supposant vrai pour $l - 1$ $(l \geqslant 0)$. Soit alors B: $g_1^j \to g_2^l$ satisfaisant (3.8) et (3.9); alors pour tout $z \in V$ l'application B_z: $X \in g_1^k \to [z, B(X)] \in g_2^{l-1}$ satisfait aussi (3.8) et (3.9) donc $B_z = 0$. On en déduit par transitivité $B = 0$.

On peut maintenant énoncer

3.6. Théoréme. *Soient $U_1 \oplus g_1^0 \oplus \cdots \oplus g_1^k$ et $U_2 \oplus g_2^0 \oplus \cdots \oplus g_2^k$ les algèbres tronquées à l'ordre $k + 1$ d'une distribution graduée G_1 sur V et d'une sous-algèbre de Lie graduée G_2 de gr $D(V)$. On suppose que $[V, G_2] \subset G_2$ et qu'il existe un isomorphisme $(\varphi, \varphi_0, \cdots, \varphi_k)$ de $U_1 \oplus g_1^0 \oplus \cdots \oplus g_1^k$ sur $U_2 \oplus g_2^0 \oplus \cdots \oplus g_2^k$. Alors $(\varphi, \varphi_0, \cdots, \varphi_k)$ se prolonge de manière unique en un automorphisme de $V \oplus V \otimes V^* \oplus \cdots \oplus V \otimes S^{k+1}(V^*)$. En particulier $g_2^l = U_2 \otimes S^{l+1}(V^*)$ pour $l \leqslant k$.*

Preuve. La proposition 3.4 est l'énoncé de théorème 3.6 pour $k = 0$. On continue par récurrence sur k; on suppose théorème 3.6 vrai pour $k - 1$ $(k \geqslant 1)$. Soit $\bar{\varphi}$ l'automorphisme de V mis en évidence dans proposition 3.4. On note $\bar{\varphi}_l$ l'extension de $\bar{\varphi}$ à $V \otimes S^{l+1}(V^*)$. L'hypothèse de récurrence s'exprime par: $\bar{\varphi}_l = \varphi_l$ sur g_1^l pour tout $l \leqslant k-1$. Montrons que $\bar{\varphi}_k = \varphi_k$ sur g_1^k ce qui achèvera la démonstration. Pour cela, posons $B = \bar{\varphi}_k - \varphi_k \colon g_1^k \to U_2 \otimes S^{k+1}(V^*)$; on montre sans peine que B satisfait aux conditions du lemme 3.5 donc $B = 0$, i.e., $\bar{\varphi}_k = \varphi_k$ sur g_1^k.

3.7. Corollaire. *Soient G_1 une distribution graduée sur V et G_2 une sous-algèbre de Lie graduée de gr $D(V)$ telle que $[V, G_2] \subset G_2$. Alors tout isomorphisme de G_1 sur G_2 se prolonge de manière unique un automorphisme de gr $D(V)$. En particulier, un tel isomorphisme existe si et seulement si G_2 est aussi une distribution graduée de rang égal à celui de G_1.*

4. Isomorphismes entre distributions involutives

On considère deux distributions involutives L et M de rang p sur V. On notera V_L^k et V_M^k leurs tronqués à l'ordre k respectivement.

4.1. Definition. Un isomorphisme de V_L^k sur V_M^k est une suite $(h^0, h^1, \cdots, h^k)$ vérifiant

(i) pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$, h^i est un isomorphisme de Δ-espaces vectoriels de V_L^i sur V_M^i;

(ii) si π_{i-1} (ou simplement π) désigne la projection canonique de V^i sur V^{i-1} on a $h^i \circ \pi = \pi \circ h^{i+1}$ pour tout $i = 0, \cdots, k-1$;

(iii) pour tout $i \in \{0, \cdots, k-1\}$ et tous $X, Y \in V_L^{i+1}$ on a $h^i[X, Y] = [h^{i+1}(X), h^{i+1}(Y)]$;

(iv) h^k induit un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\ker(V_L^k \to V_L^0)$ sur $\ker(V_M^k \to V_M^0)$.

Il est clair que si $(h^0, \cdots, h^k)$ est un isomorphisme de V_L^k sur V_M^k, alors pour $i = 0, \cdots, k-1$, $(h^0, \cdots, h^i)$ est un isomorphisme de V_L^i sur V_M^i.

Si $h\colon L \to M$ est un isomorphisme de L sur M, alors pour tout $k \geqslant 0$, h induit un isomorphisme de V_L^k sur V_M^k.

Si $(h^0, \cdots, h^k)$ est un isomorphisme de V_L^k sur V_M^k, alors $(h^0, \cdots, h^k)$ induit un isomorphisme de l'algèbre graduée tronquée à l'ordre $k-1$ de L sur celle de M; on le notera $(\varphi, \varphi_0, \cdots, \varphi_{k-1})$.

Dans la suite, on notera simplement $h^k\colon V_L^k \to V_M^k$ l'isomorphisme $(h^0, \cdots, h^k)\colon V_L^k \to V_M^k$.

Avant d'étudier de plus près les isomorphismes entre algèbres tronquées de distributions, montrons les résultats suivants.

4.2. Lemme. *Soit L une distribution et soit $N = N(L)$ son normalisateur. Alors pour tout $k \geqslant -1$ on a*

$$V_N^{k+1} = \left\{X \in V^{k+1} \mid \left[X, V_L^{k+1}\right] \subset V_L^k\right\}, \text{ où } V_L^{-1} = 0.$$

Preuve. C'est vrai pour $k = -1$ puisque N est transitive. Supposons le lemme vrai pour $k - 1$ ($k \geq 0$). Si $X \in V^{k+1}$ est tel que $[X, V_L^{k+1}] \subset V_L^k$ sa projection $\pi(X)$ sur V^k vérifie $[\pi(X), V_L^k] \subset V_L^{k-1}$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence $\pi(X) \in N^k$. Soit $Y \in N^{k+1}$ tel que $\pi(X) = \pi(Y)$; on a $[X - Y, V_L^{k+1}] \subset V_L^k$; or $X - Y \in \ker(V^{k+1} \to V^k)$ donc $[X - Y, V_L^0] \subseteq \mathrm{gr}_{k-1} L$; par suite $X - Y \in \mathrm{gr}_k N$ (puisque N est projetable maximale) donc $X \in V_N^{k+1}$.

4.3. Corollaire. *Si deux distributions ont des tronquées d'ordre k identiques, il en est de même de leurs normalisateurs.*

4.4. Lemme. *Si L et M sont deux distributions telles que* $V_L^k = V_M^k$, *alors* $\ker(V_L^{k+1} \to V_L^0) = \ker(V_M^{k+1} \to V_M^0)$.

Preuve. Soit $X \in \ker(V_L^{k+1} \to V_L^0)$. Puisque $V_L^k = V_M^k$ il existe $Y \in V_M^{k+1}$ ayant la même projection que X sur V^k.

Soient $Z \in V_{N(L)}^{k+1}$ et $Z' \in V_{N(M)}^{k+1}$ ayant la même projection sur V^k. Soit z la projection de Z et Z' sur V; puisque $X, Y \in \ker(V^{k+1} \to V)$ on a

$$[X - Y, z] = [X, Z] - [Y, Z'] \in \mathrm{gr}_{k-1} M,$$

donc $X - Y \in \mathrm{gr}_k M$, et par suite

$$X \in \ker(V_M^{k+1} \to V_M^0).$$

4.5. Proposition. *Soit k un entier supérieur ou égal à* -1. *On considère un isomorphisme* $h^{k+1}: V_L^{k+1} \to V_M^{k+1}$. *On suppose qu'il existe un automorphisme* $\tilde{h}^k$ *de* V^k *égal à* h^k *sur* V_L^k. *Soit* $\tilde{h}^{k+1}$ *une extension quelconque de* $\tilde{h}^k$ *à* V^{k+1}. *Alors si* $X \in \ker(V_L^{k+1} \to V_L^1)$ *on a* $h^{k+1}(X) = \tilde{h}^{k+1}(X)$.

Preuve. Soit φ l'automorphisme de V mis en évidence dans proposition 3.4; on notera, comme d'habitude φ_l son extension à $V \otimes S^{l+1}(V^*)$. Si $X \in \ker(V_L^{k+1} \to V_L^k)$ on a $h^{k+1}(X) = \varphi_{k+1}(X) = \tilde{h}^{k+1}(X)$. On suppose maintenant la propriété démontrée pour $X \in \ker(V_L^{k+1} \to V_L^l)$ où $1 < l \leq k$. Sous cette hypothèse $h^{k+1} - \tilde{h}^{k+1}$ induit une application B de $\ker(V_L^l \to V_L^{l-1})$ dans $\mathrm{gr}_k D(V)$. Puisque $\tilde{h}^{k+1}$ est un automorphisme de V^{k+1}, $\tilde{h}^{k+1}(V_L^{k+1})$ est la tronquée à l'ordre $k + 1$ d'une distribution. Puisque $\tilde{h}^k(V_L^k) = V_M^k$ on a, d'après lemme 4.4,

$$\tilde{h}^{k+1}(\ker(V_L^{k+1} \to V_L^0)) = \ker(V_M^{k+1} \to V_M^0).$$

En particulier, il s'ensuit que B est à valeurs dans $\mathrm{gr}_k M$. Nous allons démontrer que $B = 0$ en montrant que B satisfait aux conditions de lemme 3.5. Pour cela, soit $X_l \in \ker(V_L^l - V_L^{l-1})$, dont on notera X_{k+1} un relèvement à V_L^{k+1}; soient encore $y \in V_L^1$ et $Y_0 \in \mathrm{gr}_0 L$. Si Y est un relèvement de y dans V_L^{k+1}. Puisque $h^{k+1}(X_{k+1})$ et $\tilde{h}^{k+1}(X_{k+1})$ ont une projection nulle sur V, on a

$$\begin{aligned}[B(X_l), \varphi(y)] &= [h^{k+1}(X_{k+1}), h^{k+1}(Y)] - [\tilde{h}_{k+1}(X_{k+1}), \tilde{h}_{k+1}(Y)] \\ &= h^k[X_{k+1}, Y] - \tilde{h}^k[X_{k+1}, Y] = 0,\end{aligned}$$

puisque $h^k = \tilde{h}^k$ sur V_L^k. On a aussi avec les mêmes notations

$$[B(X_l), \varphi_0(Y_0)] = [h^{k+1}(X_{k+1}) - \tilde{h}^{k+1}(X_{k+1}), h^{k+1}(Y)],$$

où $Y \in G_L^{k+1} = \ker(V_L^{k+1} \to V_L)$ est un relèvement de Y_0, et où le deuxième crochet est un crochet dans G_L^{k+1}. Comme $\tilde{h}^{k+1}(X_{k+1}) \in \ker(V_M^{k+1} \to V_M^1)$ le crochet $[\tilde{h}^{k+1}(X_{k+1}), h^{k+1}(Y)]$ dépend seulement de $h^k(Y) = \tilde{h}^k(Y)$ donc $[\tilde{h}^{k+1}(X_{k+1}), h^{k+1}(Y)] = [\tilde{h}^{k+1}(X_{k+1}), \tilde{h}^{k+1}(Y)] = h^{k+1}[X_{k+1}, Y]$ et par suite $[B(X_l), \varphi_0(Y_0)] = h^{k+1}[X_{k+1}, Y] - h^{k+1}[X_{k+1}, Y] = B[X_l, Y_0]$. Le lemme est ainsi démontré.

4.6. Lemme. *Avec les notations antérieures si $X \in \ker(V_L^{k+1} \to V_L)$ est tel que $\pi_1^{k+1}(X) = e_i \otimes e^j$, alors il existe $f^j \in S^{k+1}(V^*)$ et un seul, indépendant de i, tel que $\partial f^j / \partial x = 0$ pour tout $x \in V_L$ et*

$$h^{k+1}(X) = \tilde{h}^{k+1}(X) + \varphi(e_i) \otimes f^j, \quad 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Démonstration. En vertu de proposition 4.5 l'application $h^{k+1} - \tilde{h}^{k+1}$: $G_L^{k+1} = \ker(V_L^{k+1} \to V) \to V \otimes S^{k+1}(V^*)$ induit une application linéaire β: $g_L^0 \to V \otimes S^{k+1}(V^*)$. On montre comme dans proposition 4.5 que

$$[\varphi(V_L), \beta(g_L^0)] = 0. \tag{4.1}$$

Par ailleurs si X^0, $Y^0 \in g_L^0$ et si X et Y sont des relèvements de X^0 et Y^0 respectivement, dans G_L^{k+1} on a

$$\begin{aligned}\beta[X^0, Y^0] &= h^{k+1}[X, Y] - \tilde{h}^{k+1}[X, Y]\\ &= [h^{k+1}(X), h^{k+1}(Y)] - [\tilde{h}^{k+1}(X), \tilde{h}^{k+1}(Y)]\\ &= [h^{k+1}(X), h^{k+1}(Y) - \tilde{h}^{k+1}(V)]\\ &\quad + [h^{k+1}(X) - \tilde{h}^{k+1}(X), \tilde{h}^{k+1}(Y)]\\ &= [\varphi_0(X^0), \beta(Y^0)] + [\beta(X^0), \varphi_0(Y^0)].\end{aligned}$$

Lorsque $X^0 = e_i \otimes e^j$ et $Y^0 = e_s \otimes e^t$ cette égalité s'écrit

$$\begin{aligned}\delta_t^i\beta(e_s \otimes e^j) - \delta_s^j(e_i \otimes e^t) &= [\varepsilon_i \otimes \varepsilon^j, \beta(e_s \otimes e^t)]\\ &\quad + [\beta(e_i \otimes e^j), \varepsilon_s \otimes \varepsilon^t].\end{aligned} \tag{4.2}$$

On pose pour simplifier $\beta_i^j = \beta(e_i \otimes e^j)$. En vertu de (4.1) on a

$$[\beta_i^j, \varepsilon_s \otimes \varepsilon^t] = \varepsilon_s \otimes (\varepsilon^t \circ \beta_i^j),$$

donc (4.2) s'écrit

$$\delta_t^i\beta_s^j - \delta_s^j\beta_i^t = \varepsilon_s \otimes (\varepsilon^t \circ \beta_i^j) - \varepsilon_i \otimes (\varepsilon^j \circ \beta_s^t). \tag{4.3}$$

Posons dans (4.3) $s = t = i$; on obtient alors

$$\beta_i^j = \varepsilon_i \otimes (\varepsilon^i \circ \beta_i^j - \varepsilon^j \circ \beta_i^i) = \varepsilon_i \otimes \gamma_i^j, \quad \text{si } i \neq j.$$

Il en résulte que $\varepsilon^j \circ \beta_i^i = 0$ pour tout $j \neq i$, donc on peut écrire

$$\beta_i^i = \varepsilon_i \otimes \gamma_i^i.$$

Appliquons de nouveau (4.3) avec $t = i$ et $s \neq j$; on a alors compte tenu des expressions antérieures des β_i^j:

$$\varepsilon_s \otimes \gamma_s^j = \varepsilon_s \otimes \gamma_i^j,$$

donc $\gamma_s^j = \gamma_i^j$, i.e., γ_i^j est indépendant de i. On posera $f^j = \gamma_i^j$. On a ainsi

$$\beta(e_i \otimes e^j) = \varepsilon_i \otimes f^j.$$

Le fait que $\partial f^s/\partial x = 0$ pour $x \in \varphi(V_L)$ résulte de 4.1.

4.7. Corollaire. *Avec les données et notations antérieures, il existe un unique* $\gamma^k \in V \otimes S^{k+1}(V^*)$ *vérifiant*

$$[\varphi(V_L), \gamma^k] = 0, \tag{4.4}$$

$$h^{k+1}(X) = \tilde{h}^{k+1}(X) + [\varphi_0(\pi_1^{k+1}X), \gamma^k] \quad \textit{pour } X \in G_L^{k+1}. \tag{4.5}$$

Démonstration. Par lemme 3.2, γ^k est unique. Observons maintenant que $\gamma^k = -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \otimes f^i$ répond à la question.

Nous venons ainsi de répondre à la question suivante: étant donné un isomorphisme tronqué h^{k+1}: $V_L^{k+1} \to V_M^{k+1}$ tel que h^k: $V_L^k \to V_M^k$ admette une extension $\tilde{h}^k$ sur V^k, quelles relations y a-t-il entre h^{k+1} et les divers relèvements de $\tilde{h}^k$ à V^{k+1}? Notre prochaine étape sera d'examiner les rapports qui existent entre deux extensions $\bar{h}^k$ et $\tilde{h}^k$ de h^k à V^k.

4.8. Lemme. *Soient* $\bar{h}^k$ *et* $\tilde{h}^k$ *deux extensions de* h^k *à* V^k. *Alors*

(i) $\bar{h}^{k-1} = \tilde{h}^{k-1}$ *sur* V^{k-1},

(ii) $\bar{h}^k = \tilde{h}^k$ *sur* $G^k = \ker(V^k \to V)$,

(iii) *il existe* $\delta^k \in V \otimes S^{k+1}(V^*)$ *et un seul tel que* $[V_M, \delta^k] = 0$ *et* $\bar{h}^k(X) = \tilde{h}^k(X) + [\varphi(\pi_0^k(X)), \gamma^k]$ *pour tout* $X \in V^k$.

Démonstration.

(i) Se montre par récurrence sur k. On sait par proposition 3.4 que c'est vrai pour $k = 1$. Admettons le pour $k - 1$ ($k \geqslant 2$) et montrons-le pour k. Puisque $\bar{h}^k = \tilde{h}^k$ sur V_L^k on a $\bar{h}^{k-1} = \tilde{h}^{k-1}$ sur V_L^{k-1} donc, d'après l'hypothèse de récurrence $\bar{h}^{k-2} = \tilde{h}^{k-2}$ sur V^{k-2}. Il en résulte que $\bar{h}^{k-1} - \tilde{h}^{k-1}$ prend ses valeurs dans $\mathrm{gr}_{k-2} D(V) = V \otimes S^{k-1}(V^*)$. En plus si $y \in V_L$ et si $Y \in V_L^{k-1}$ est un relèvement de y, on a

$$\begin{aligned}[\bar{h}^{k-1}(X) - \tilde{h}^{k-1}(X), \varphi(y)] &= [\bar{h}^{k-1}(X) - \tilde{h}^{k-1}(X), h^{k-1}(Y)] \\ &= \bar{h}^{k-2}[X, Y] - \tilde{h}^{k-2}[X, Y] = 0.\end{aligned}$$

Soit maintenant N le normalisateur de L. Si $X \in V_N^{k-1}$ et si $Y^0 \in g_L^0$ alors $[\bar{X}, \bar{Y}] \in V_L^{k-1}$ où $\bar{X}$, $\bar{Y}$ sont des relèvements de X et Y^0 dans V_N^k et V_L^k

respectivement; par conséquent

$$\begin{aligned}\left[\bar{h}^{k-1}(X) - \tilde{h}^{k-1}(X), \varphi_0(Y^0)\right] &= \left[\bar{h}^{k}(\bar{X}) - \tilde{h}^{k}(X), h^{k}(\bar{Y})\right] \\ &= \bar{h}^{k-1}\left[\bar{X}, \bar{Y}\right] - \tilde{h}^{k-1}\left[\bar{X}, \bar{Y}\right] = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte alors de lemme 3.2 que $\bar{h}^{k-1} = \tilde{h}^{k-1}$ sur V_N^{k-1}. Puisque N est transitive, la proposition 4 de [6] implique que $\bar{h}^{k-1} = \tilde{h}^{k-1}$ sur V^{k-1}.

(ii) Soit $X \in G^k$ et soit $y \in V$. Si $Y \in V^k$ est un relèvement de y on a

$$\left[\bar{h}^{k}(X) - \tilde{h}^{k}(X), \varphi(y)\right] = \left[\bar{h}^{k}(X) - \tilde{h}^{k}(X), \bar{h}^{k}(Y)\right].$$

Or,

$$\left[\tilde{h}^{k}(X), \bar{h}^{k}(Y)\right] = \left[\tilde{h}^{k}(X), \tilde{h}^{k}(Y)\right]$$

puisque $\tilde{h}^k(X) \in G^k$ et $\bar{h}^{k-1} = \tilde{h}^{k-1}$, donc $[\bar{h}^k(X) - \tilde{h}^k(X), \varphi(y)] = 0$ et par suite $\bar{h}^k(X) = \tilde{h}^k(X)$.

(iii) D'après (i) et (ii), $\bar{h}^k - \tilde{h}^k$ induit $\varepsilon \in \mathrm{gr}_{k-1} D(V) \otimes V^*$. On remarque que $d\varepsilon(x, y) = [\varphi(x), \varepsilon(y)] - [\varphi(y), \varepsilon(x)] = 0$ donc il existe $\delta^k \in \mathrm{gr}_k D(V) = V \otimes S^{k+1}(V^*)$ et un seul tel que $\varepsilon(x) = [\varphi(x), \delta^k]$. Puisque $\bar{h}^k = \tilde{h}^k$ sur V_L^k on a $[\delta^k, V_M] = 0$.

4.9. Lemme. *Avec les données et notations de lemme 4.8 si $\bar{h}^{k+1}$ et $\tilde{h}^{k+1}$ sont des relèvements de $\bar{h}^k$ et $\tilde{h}^k$ respectivement à V^{k+1} on a*

$$\bar{h}^{k+1}(X) = \tilde{h}^{k+1}(X) + \left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}(X)\right), \delta^k\right] \quad \textit{pour } X \in G^{k+1}.$$

Démonstration. Soit $X \in G^{k+1}, y \in V$ et $Y \in V^{k+1}$ un relèvement de y. Comme $\bar{h}^k = \tilde{h}^k$ sur G^k on a

$$\bar{h}^{k+1}(X) - \tilde{h}^{k+1}(X) \in \mathrm{gr}_k D(V),$$

$$\begin{aligned}\left[\bar{h}^{k+1}(X) - \tilde{h}^{k+1}(X), \varphi(y)\right] &= \left[\bar{h}^{k+1}(X) - \tilde{h}^{k+1}(X), \bar{h}^{k+1}(X)\right] \\ &= \bar{h}^{k}\left[X, Y\right] - \tilde{h}^{k}\left[X, Y\right] \\ &\quad + \left[\tilde{h}^{k+1}(X), \tilde{h}^{k+1}(Y) - \bar{h}^{k+1}(X)\right].\end{aligned}$$

Or $\pi_0^k[X, Y] = [\pi_1^{k+1}X, y]$ donc d'après proposition 4.5-(iii), on a

$$\bar{h}^{k}\left[X, Y\right] - \tilde{h}^{k}\left[X, Y\right] = \left[\left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}X\right), \varphi(y)\right], \delta^k\right].$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}&\left[\tilde{h}^{k+1}(X), \tilde{h}^{k+1}(Y) - \bar{h}^{k+1}(Y)\right] \\ &\quad = \left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}(X)\right), \tilde{h}^{k}\left(\pi_k^{k+1}(Y)\right) - \bar{h}^{k}\left(\pi_k^{k+1}(Y)\right)\right] \\ &\quad = -\left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}(X)\right), \left[\beta(y), \delta^k\right]\right],\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left[\bar{h}^{k+1}(X) - \tilde{h}^{k+1}(X), \varphi(y)\right] &= \left[\left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}(X)\right), \varphi(y)\right], \delta^k\right] - \left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}(X)\right), \left[\varphi(y), \delta^k\right]\right] \\ &= \left[\left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}(X)\right), \delta^k\right], \varphi(y)\right],\end{aligned}$$

d'où par transitivité

$$\bar{h}^{k+1}(X) - \tilde{h}^{k+1}(X) = \left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}X\right), \delta^k\right].$$

On peut maintenant démontrer le résultat principal de cette section d'où résultera le théorème d'extension d'un homomorphisme injectif défini sur une distribution.

4.10. Proposition. *Soit L une distribution involutive de rang $p > 0$ dont on notera V_L^k l'algèbre tronquée d'ordre k. On considère un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie tronquées h^{k+1}: $V_L^{k+1} \to V^{k+1}$ $(k \geqslant 0)$ et l'on suppose qu'il existe $\tilde{h}^k \in \mathrm{Aut}(V^k)$ tel que $\tilde{h}^k = h^k$ sur V_L^k et que $[\mathrm{gr}_k\, h^{k+1}(\mathrm{gr}_k\, L), V] \subset \mathrm{gr}_{k-1}\, h^{k+1}(\mathrm{gr}_{k-1}\, L)$. Il existe alors un unique automorphisme $\bar{h}^k$ de V^k égal à h^k sur V_L^k et possédant un relèvement $\bar{h}^{k+1}$ sur V^{k+1} égal à h^{k+1} sur V_L^{k+1}.*

Démonstration. L'unicité de $\bar{h}^k$ résulte de lemmes 4.8, 4.9 et 3.2. Considérons maintenant un relèvement $\tilde{h}^{k+1}$ de $\tilde{h}^k$ à V^{k+1}. D'après corollaire 4.7 il existe un élément $\gamma^k \in V \otimes S^{k+1}(V^*)$ et un seul tel que

$$\left[\varphi(V_L), \gamma^k\right] = 0, \quad h^{k+1}(X) = \tilde{h}^{k+1}(X) + \left[\varphi_0\left(\pi_1^{k+1}(X)\right), \gamma^k\right]$$

pour tout $X \in G_L^{k+1}$. Posons

$$\bar{h}^k(X) = \tilde{h}^k(X) + \left[\varphi\left(\pi_0^k X\right), \gamma^k\right], \quad X \in V^k.$$

Il est clair que $\bar{h}^k$ est un automorphisme de V^k et est égal à h^k sur V_L^k. De plus, d'après lemme 4.9, tout relèvement ψ de $\bar{h}^k$ à V^{k+1} est égal à h^{k+1} sur G_L^{k+1} et par suite $h^{k+1} - \psi$ induit $\varepsilon \in \mathrm{gr}_k\, D(V) \otimes V_L^*$. On montre facilement que $[\varepsilon(x), \varphi(y)] - [\varepsilon(y), \varphi(x)] = 0$ pour tous $x, y \in V_L$ donc (cf. [1]) il existe $\vartheta \in \mathrm{gr}_{k+1}\, D(V)$ tel que $\varepsilon(x) = [\varphi(x), \vartheta]$ pour tout $x \in V_L$. On constate alors que l'on obtient un relèvement de $\bar{h}^k$ égal à h^{k+1} sur V_L^{k+1} en posant

$$\bar{h}^{k+1}(X) = \psi(X) + \left[\varphi\left(\pi_0^{k+1}X\right), \vartheta\right].$$

En appliquant corollaire 3.7 et 2.7 on montre par récurrence le théorème suivant.

4.8. Théorème. *Soit L une distribution de rang $p > 0$ sur $D(V)$ et soit h: $L \to D(V)$ un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie filtrées. Alors h se* *prolonge en un automorphisme de $D(V)$ si et seulement si*

$$[V, \operatorname{gr} h(\operatorname{gr} L)] \subset \operatorname{gr} h(\operatorname{gr} L).$$

De plus l'extension de h à $D(V)$ est unique. En particulier $h(L)$ est aussi une distribution de rang p.

Remarque. L'unicité de l'extension $\bar{h}$ de h à $D(V)$ peut se démontrer facilement à l'aide du [9, Théorème 2.5]. En effet si h' est une autre extension de h on peut écrire $\bar{h} = \overline{H}_*$ et $h' = H'_*$ où H, H' sont des automorphismes de $\hat{S}(V^*)$. On a alors pour tout $X \in L$ $X \neq 0$ et tout $f \in \hat{S}(V^*)$, $\bar{h}(fX) = h'(fX)$ ou encore $\overline{H}(f)\bar{h}(X) = H'(f)h'(X)$ donc $\overline{H} = H'$ et par suite $\bar{h} = h'$.

Index des principales notations

$\hat{S}(V^*)$	Algèbre des séries formelles définies sur V.
$\mathfrak{M}$	Idéal maximal de $\hat{S}(V^*)$.
$D(V)$	Algèbre de Lie filtrée des Δ-dérivations de $\hat{S}(V^*)$.
$\{L^k\}_{k \geqslant -1}$	Filtration d'un sous-espace L de $D(V)$.
$\operatorname{gr} L = \bigoplus_{k \geqslant -1} \operatorname{gr}_k L$	Espace gradué associé à $L \subset D(V)$.
$\hat{L}$	Sous-$\hat{S}(V^*)$-module de $D(V)$ engendré par $L \subset D(V)$.
V^k	Algèbre de Lie tronquée à l'ordre k de $D(V)$.
V^k_L	Algèbre de Lie tronquée à l'ordre k d'une sous-algèbre L de $D(V)$.
$[\,,\,]$	Application de $V^k \wedge V^k$ dans V^{k-1} induite par le crochet de $D(V)$.
$\operatorname{Dis}_p(V)$	Ensemble des distributions de rang p sur V.
$\Pi_p^{\max}(V)$	Ensemble des algèbres p-projetables maximales de $D(V)$.
$\hat{G}(K)$	voir [9, pp. 456–457.].

Bibliography

[1] J. B. Botelho, *Le théorème de Frobenius formel*, J. Differential Geometry **12** (1977), 319–325.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chaps. 2 et 3, Hermann, Paris, 1961.

[3] ———, *Algèbre*, chap. 4, Hermann, Paris, 1950.

[4] H. Cartan & S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

[5] V. Guillemin & S. Sternberg, *An algebraic model of transitive differential geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 16–47.
[6] I. Hayashi, *Embedding and existence theorems of infinite Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970) 1–14.
[7] N. Jacobson, *Lie algebras*, Wiley-Interscience, New York, 1962.
[8] M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*, Publication Soc. Math. São Paulo, Brasil, 1967.
[9] A. Petitjean, *Prolongements d'homomorphismes d'algèbres de Lie filtrées transitives*, J. Differential Geometry **9** (1974) 451–464.
[10] N. V. Que & A. Rodrigues, *Troisième théorème fondamental de réalisation de Cartan*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25** (1975) 251–282.
[11] D. S. Rim, *Deformations of transitive Lie algebras*, Ann. of Math. **83** (1966) 339–357.
[12] P. Samuel & O. Zariski, *Commutative algebra*, Vol. 2, Springer, Berlin, 1975.
[13] I. M. Singer & S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan*, *Part* I, J. Analyse Math. **15** (1965) 1–114.

UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE